Université Sultan Mly Slimane
Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Année Universitaire 2019-2020
Filière : SMIA (S2)

# Une correction du Problème (donné 26 Juin 2020)

*Prof. Responsable : S. Najib*

***Données :***

- K un corps commutatif, E et F deux K-Espaces vectoriels et $u \in L_K(E, F)$ ;
- G un supplémentaire de Ker(u) dans E, c'est-à-dire :
  $\boldsymbol{G + Ker(u) = E}$ ***et*** $\boldsymbol{G \cap Ker(u) = \{0_E\}}$ ;
- H un supplémentaire de Im(u) dans F, c'est-à-dire :
  $\boldsymbol{H + Im(u) = F}$ ***et*** $\boldsymbol{H \cap Im(u) = \{0_F\}}$ ;
- **p**: $E = G \oplus Ker(u) \to E$, $x = x_1 + x_2 \mapsto x_1$ la projection sur G parallèlement à Ker(u) ;
- **q**: $F = Im(u) \oplus H \to F$, $y = y_1 + y_2 \mapsto y_1$ la projection sur Im(u) parallèlement à H.

**1)** ***Montrons que u o p= u*** :

Soit $x \in E$ ; on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in G$ et $x_2 \in Ker(u)$.

On a $(u \circ p)(x) = u(p(x)) = u(x_1)$ et $u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1)$ puisque $x_2 \in Ker(u)$ implique $u(x_2)=0$. Ainsi $(u \circ p)(x) = u(x)$ et ceci pour tout $x \in E$. Par conséquent $u \circ p = u$.

Soit l'application linéaire **h** : $G \to Im(u)$, $x \mapsto u(x)$.

**2)** ***Montrons que h est un isomorphisme de K-espaces vectoriels*** :
Comme h est linéaire, il reste à montrer que h est bijective.

- *h est injective* : Soit $x \in G$ tel que $h(x) = u(x) = 0$. Donc $x \in G$ et $x \in Ker(u)$ alors $x \in G \cap Ker(u) = \{0_E\}$. Ainsi $x = 0_E$ et h est injective.

- h est surjective : Soit $y \in Im(u)$ alors $y= u(x)$ avec $x \in E$. De plus x peut s'écrire comme $x= x_1 + x_2$ avec $x_1 \in G$ et $x_2 \in Ker(u)$. Donc $y= u(x)= u(x_1)= h(x_1)$. Ainsi h est surjective.

**3)** On définit l'application linéaire **v** par : $v= i \circ h^{-1} \circ q$ où **i** : $G \rightarrow E$ est l'injection canonique de G dans E.

***Montrons que v o u = p.***

On a $v \in L_K(F, E)$ et $v \circ u \in L_K(E)$. Soit $x \in E$ alors $x= x_1 + x_2$ avec $x_1 \in G$ et $x_2 \in Ker(u)$.

Donc $(v \circ u)(x)= v(u(x))= v(u(x_1))= (i \circ h^{-1} \circ q)(u(x_1)) = (i \circ h^{-1} [q(u(x_1))]$. Or $q(u(x_1))= u(x_1)$ car $u(x_1) \in Im(u)$ et q est la projection sur Im(u). De plus $u(x_1)= h(x_1)$ car $x_1 \in G$ et par définition de l'application h.

Ainsi $(v \circ u)(x)= (i \circ h^{-1})( h(x_1))= i(h^{-1}(h(x_1)))= i(x_1)= x_1$ car $x_1 \in G$ et par définition de l'application i.

Par conséquent $(v \circ u)(x)= x_1= p(x)$ et ceci pour tout $x \in E$. Ainsi $v \circ u = p$.

**4)** Soit $u \in L_K(E, F)$. On considère l'application $v = i \circ h^{-1} \circ q \in L_K(F, E)$ de la question **3)**. Alors $u \circ v \circ u = u \circ p = u$ (car $v \circ u = p$ et $u \circ p = u$). Donc on a montré que pour tout $u \in L_K(E, F)$, il existe $v \in L_K(F, E)$ tel que $u \circ v \circ u = u$.

**5)** ***Montrons que*** :

***u est injective $\Leftrightarrow \exists$ v ϵ $L_K(F, E)$ tel que v o u = $Id_E$***

$\Leftarrow$) *Supposons qu'il existe $v \in L_K(F, E)$ tel que $v \circ u = Id_E$ et montrons que u est injective.*

Soit $x \in Ker(u)$. On a $v \circ u = Id_E$ alors

$$x = Id_E(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))= v(0) = 0_E$$

[*car $x \in Ker(u)$ et v est linéaire*].

Donc $x = 0_E$. Par conséquent $Ker(u)= \{0_E\}$, et u est injective.

$\Rightarrow$) *Supposons que u est injective, et montrons qu'il existe $v \in L_K(F, E)$ tel que $v \circ u = Id_E$.*

D'après les questions précédentes, il existe $v \in L_K(F, E)$ tel que $v \circ u = p$.

Soit $x \in E$, on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in G$ et $x_2 \in Ker(u)$.

Alors $(v \circ u)(x) = p(x) = x_1 = x$

[*car $x_2 \in Ker(u)$ implique $x_2 = 0_E$ puisque u est injective*].

Ainsi pour tout $x \in E$, $(v \circ u)(x) = x$. Donc $v \circ u = Id_E$.

***Montrons que*** :

***u est surjective $\Leftrightarrow \exists$ $v \in L_K(F, E)$ tel que $u \circ v = Id_F$***

$\Leftarrow$) *Supposons qu'il existe $v \in L_K(F, E)$ tel que $u \circ v = Id_F$ et montrons que u est surjective.*

Soit $y \in F$. On a $y= Id_F(y) = (uov)(y) = u(v(y)) \in Im(u)$, et comme $Im(u)$ est un sous-espace vectoriel de F alors $Im(u)= F$. Par conséquent u est surjective.

$\Rightarrow$) *Supposons que u est surjective, et montrons qu'il existe $v \in L_K(F, E)$ tel que $u \circ v = Id_F$.*

D'après les questions précédentes, on considère l'application $v = i \circ h^{-1} \circ q \in L_K(F, E)$.

Soit $y \in F$. On écrit $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in Im(u)$ et $y_2 \in H$. Or u est surjective donc $Im(u) = F$, et par suite $H= \{0_F\}$ [car *$H + Im(u)= F$*]. En particulier $y_2 = 0_F$.

Alors $(u \circ v)(y) = u(v(y))$, et $v(y)= (i \circ h^{-1})[q(y)] =$ $(i \circ h^{-1})(y_1)$ [*d'après la définition de la projection q*].

Donc $v(y) = (i \circ h^{-1})(y_1) = i(h^{-1}(y_1)) = h^{-1}(y_1)$ [*car $h^{-1}(y_1) \in G$ et par définition de l'injection $i$*].

Ainsi $(u \circ v)(y) = u(h^{-1}(y_1)) = h(h^{-1}(y_1))$ [*car $u = h$ sur $G$*].

Ou encore $(u \circ v)(y) = y_1 = y$ [car $y = y_1 + y_2$ et $y_2 = 0_F$].

*En conclusion*, on a montré que $(u \circ v)(y) = y$ pour tout $y \in F$. C'est-à-dire $u \circ v = Id_F$.